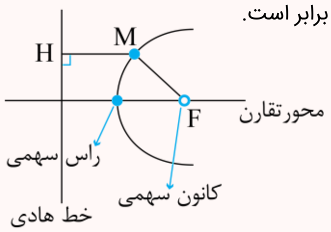
پاسخ: گزینهٔ ۲ — (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۲) (کنکور خارج ۱۴۰۳)

سهمی

مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصلهٔ آن‌ها از نقطه‌ای ثابت به نام کانون سهمی و خطی ثابت به نام خط هادی سهمی برابر است.



$$MF = MH$$

اگر محور تقارن سهمی در جهت محور xها باشد، سهمی افقی و اگر محور تقارن سهمی در جهت محور yها باشد، سهمی قائم است.

معادلهٔ سهمی افقی به مرکز $O\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.$: a = فاصلهٔ رأس تا خط هادی = فاصلهٔ کانون تا رأس $\quad (y-\beta)^2 = \pm 4a(x-\alpha)$

(+): دهانه در جهت محور x (-): دهانه در خلاف جهت محور x

معادلهٔ سهمی قائم به مرکز $O\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.$: a = فاصلهٔ رأس تا خط هادی = فاصلهٔ کانون تا رأس $\quad (x-\alpha)^2 = \pm 4a(y-\beta)$

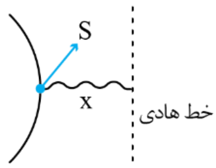
(+): دهانه در جهت محور y (-): دهانه در خلاف جهت محور y

معادلهٔ سهمی $y^2 - 2y + 4x = a \Rightarrow y^2 - 2y + 1 = -4x + a + 1$

$$\Rightarrow (y-1)^2 = 4(-1)\left(x - \frac{a+1}{4}\right)$$

$$\Rightarrow x_S = \frac{a+1}{4} \quad \text{و} \quad P = 1$$

شکل فرضی سهمی :



خط هادی : $x = \frac{a+1}{4} + 1 = \frac{a+5}{4}$

$$\Rightarrow \frac{a+5}{4} = 3 \Rightarrow a + 5 = 12 \Rightarrow a = 7$$

گروه آموزشی ماز

سؤالات کنکور: هندسه فصل ۳ دوازدهم

۴۷- به ازای کدام مقدار m، سه بردار $\vec{a}=(-1,2,3)$، $\vec{b}=(2,0,1)$ و $\vec{c}=(-4,m,5)$ در یک صفحه‌اند؟

۱) ۲- ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۴ — (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۳) (کنکور داخل ۹۸)

می‌دانیم شرط هم‌صفحه بودن سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ این است که $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=0$ باشد:

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -4 & m & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -1(-m) - 2(10 - (-4)) + 3(2m) = 0 \Rightarrow m - 2(14) + 6m = 0 \Rightarrow 7m = 28 \Rightarrow m = 4$$

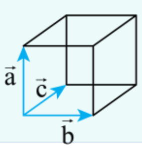
گروه آموزشی ماز

۴۸- اگر $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ و $\vec{b} = 4\vec{i} + \vec{k}$ باشند، حجم متوازی‌السطوحی که بر روی سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}\times\vec{b}$ ساخته شود، کدام است؟

۱) ۱۵۶ ۲) ۱۶۹ ۳) ۱۷۴ ۴) ۱۸۹

پاسخ: گزینهٔ ۴ — (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۳) (کنکور خارج ۹۸)

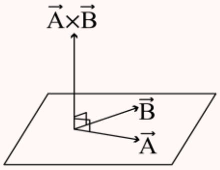
اگر $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار غیرواقع بر یک صفحه باشند، آن‌گاه حجم متوازی‌السطوح ساخته شده روی این سه بردار برابر است با:



$$v = \left|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})\right|$$

ضرب خارجی ۲ بردار

ضرب خارجی ۲ بردار $\vec{A}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{B}=(b_1,b_2,b_3)$ برداری است که بر هر ۲ بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و بر صفحهٔ شامل ۲ بردار عمود است. ضرب خارجی ۲ بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ یعنی $\vec{A}\times\vec{B}$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:



$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ برابر است با:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}=3\vec{i}-6\vec{j}-12\vec{k}=(3,-6,-12)$$

حجم متوازی‌السطوح ساخته شده توسط سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ برابر است با:

$$\left|(\vec{a}\times\vec{b}).(\vec{a}\times\vec{b})\right|=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2=\left(\sqrt{3^2+(-6)^2+(-12)^2}\right)^2=9+36+144=189$$

گروه آموزشی ماز

۴۹- بردار $\vec{a}=(-1,\alpha,1)$ با محور z در فضا زاویهٔ ۴۵ درجه می‌سازد. اگر $\vec{b}=(-\frac{4}{3},\frac{2}{3},2)$ و زاویهٔ بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ با محور z ها، θ باشد، مقدار $\cos\theta$، کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
۲) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$
۳) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ — (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۳) (کنکور داخل ۱۴۰۰)

نکتهٔ ۱:

اگر بردار a به صورت $\vec{a}=(x,y,z)$ باشد:

زاویه بردار $\vec{a}$ با محور xها: $\cos\alpha=\frac{x}{|\vec{a}|}$

زاویه بردار $\vec{a}$ با محور yها: $\cos\beta=\frac{y}{|\vec{a}|}$

زاویه بردار $\vec{a}$ با محور zها: $\cos\gamma=\frac{z}{|\vec{a}|}$

نکتهٔ ۲:

اگر $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ و $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ باشد:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

می‌دانیم که زاویه بردار $\vec{a}(-1,\alpha,1)$ با محور z در فضا برابر ۴۵ درجه است. بنابراین طبق نکته ۱:

$$\cos\gamma=\frac{z}{|\vec{a}|}\Rightarrow\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{(-1)^2+\alpha^2+1}}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+2}}$$

$$\Rightarrow\sqrt{2(\alpha^2+2)}=2\Rightarrow 2(\alpha^2+2)=4\Rightarrow\alpha^2+2=2\Rightarrow\alpha=0$$

بنابراین بردار $\vec{\alpha}$ برابر $\vec{a}=(-1,0,1)$ است و می‌دانیم که بردار $\vec{b}$ نیز به صورت $\vec{b}=(-\frac{4}{3},\frac{2}{3},2)$ است. پس:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 2 \end{vmatrix}=(0-\frac{2}{3})\vec{i}-(-2+\frac{4}{3})\vec{j}+(-\frac{2}{3}-0)\vec{k}=-\frac{2}{3}\vec{i}+\frac{2}{3}\vec{j}-\frac{2}{3}\vec{k}$$

حال اندازه بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ برابر است با:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{(-\frac{۲}{۳})^{۲}+(\frac{۲}{۳})^{۲}+(-\frac{۲}{۳})^{۲}}=\sqrt{۳\times\frac{۴}{۹}}=\sqrt{\frac{۴}{۳}}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

در نهایت چون کسینوس زاویه‌ای که بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ با محور z ها را می‌خواهیم، مجدداً مطابق نکته ۱ داریم:

$$\cos\theta=\frac{z}{|\vec{a}\times\vec{b}|}\Rightarrow\cos\theta=\frac{-\frac{۲}{۳}}{\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}}=-\frac{۱}{\sqrt{۳}}=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

گروه آموزشی ماز

۵۰- دو بردار که اندازه یکی دو برابر دیگری است، با هم زاویه ۶۰ درجه می‌سازند. زاویه بین بردار بزرگ‌تر و تفاضل دو بردار، چند درجه است؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۵ ۳) ۶۰ ۴) ۱۲۰

پاسخ: گزینهٔ ۱ (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۳) (کنکور داخل ۱۴۰۱)

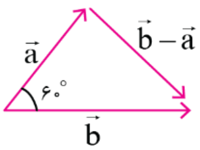
نکته ۱

زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$:

$$\cos\theta=\frac{\vec{b}.\vec{a}}{|\vec{b}||\vec{a}|}$$

نکته ۲

$$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$



$$|\vec{b}-\vec{a}|^{۲}=|\vec{b}|^{۲}+|\vec{a}|^{۲}-۲|\vec{b}||\vec{a}|\cos ۶۰=(۲|\vec{a}|)^{۲}+|\vec{a}|^{۲}-۲(۲|\vec{a}|)|\vec{a}|\times\frac{۱}{۲}$$

$$\to|\vec{b}-\vec{a}|^{۲}=۳|\vec{a}|^{۲}\to|\vec{b}-\vec{a}|=\sqrt{۳}|\vec{a}|$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{b}.(\vec{b}-\vec{a})}{|\vec{b}||\vec{b}-\vec{a}|}=\frac{|\vec{b}|^{۲}-\vec{b}.\vec{a}}{۲|\vec{a}|(\sqrt{۳}|\vec{a}|)}=\frac{۴|\vec{a}|^{۲}-|\vec{a}||\vec{b}|\cos ۶۰^\circ}{۲\sqrt{۳}|\vec{a}|^{۲}}=\frac{۴|\vec{a}|^{۲}-|\vec{a}|^{۲}}{۲\sqrt{۳}|\vec{a}|^{۲}}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\to\theta=۳۰^\circ$$

گروه آموزشی ماز

۵۱- فرض کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بردارهای ناصفری هستند که ضرب داخلی آن‌ها، $-\frac{۳}{۵}$ حاصل‌ضرب اندازه‌های دو بردار است. مساحت مثلثی را که توسط بردارهای $(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}-\frac{۲\vec{b}}{|\vec{b}|})$ و $(\frac{۳\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{۲\vec{b}}{|\vec{b}|})$ ساخته می‌شود، کدام است؟

۱) ۶/۴ ۲) ۴/۸ ۳) ۳/۲ ۴) ۱/۶

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۳) (کنکور داخل ۱۴۰۲)

نکته ۱:

ضرب داخلی: اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار در فضا باشند، آن‌گاه داریم:

$$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

θ: زاویهٔ بین ۲ بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$

نکته ۲:

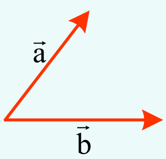
اندازهٔ ضرب خارجی: برای ۲ بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در فضای $\mathbb{R}^{۳}$ داریم:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

θ: زاویهٔ بین ۲ بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$

نکته ۳:

مساحت مثلثی که توسط ۲ بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در فضا ساخته می‌شود برابر است با:



$$S_{\Delta}=\frac{۱}{۲}|\vec{a}\times\vec{b}|=\frac{۱}{۲}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

با استفاده از اطلاعات سوال، $\vec{a}.\vec{b}=\frac{-۳}{۵}|\vec{a}||\vec{b}|$ است و می‌دانیم مساحت مثلثی که روی بردارهای داده شده ساخته می‌شود برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}\left|\left(\frac{۳\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{۲\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)\times\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}-\frac{۲\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)\right|=\frac{۱}{۲}\left|\vec{o}-\frac{۶\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}+\frac{\overbrace{۲b\times a}^{-۲\vec{a}\times\vec{b}}}{|\vec{a}||\vec{b}|}-\vec{o}\right|=\frac{۱}{۲}\left|\frac{-۸(\vec{a}\times\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right|$$

$$\xrightarrow[\substack{|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\frac{-۳}{۵}|\vec{a}||\vec{b}| \\ \cos\theta=\frac{-۳}{۵}\Rightarrow\sin\theta=\frac{۴}{۵}}]{\vec{a}.\vec{b}=\frac{-۳}{۵}|\vec{a}||\vec{b}|}\frac{۴|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta}{|\vec{a}||\vec{b}|}=۴\left(\frac{۴}{۵}\right)=\frac{۱۶}{۵}=۳/۲$$

گروه آموزشی ماز